TD 05 Méthode probabiliste et convergence des variables aléatoires

Exercice 1. *Théorème de Mycielski*

La coloration d'un graphe G consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes. Le nombre minimal de couleurs est appelé ***nombre chromatique***, on le note $\chi(G)$.
Clairement, les graphes contenant de grandes cliques ont un grand nombre chromatique, mais la réciproque n'est pas vraie. Le but de cet exercice est de prouver le **théorème de Mycielski** [1] : pour tout entier $k \geq 2$, il existe un graphe G tel que G ne contient aucun triangle et avec pourtant $\chi(G) \geq k$.

1. Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ et soit G un graphe aléatoire avec n sommets où chaque arrête est présente indépendamment des autres avec probabilité $p = n^{\varepsilon-1}$. Montrer que quand n tend vers l'infini, la probabilité que G ait plus de $n/2$ triangles tend vers 0.
2. Soit $\alpha(G)$ la taille du plus grand ***ensemble indépendant*** de G (un ensemble indépendant est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents). Montrer que $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.
3. Soit $a = 3n^{1-\varepsilon} \ln n$. Montrer que :
$$\mathbf{P}\{\alpha(G) < a\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\,.$$
En déduire qu'il existe n et G de taille n tels que G a au plus $\frac{n}{2}$ triangles et $\alpha(G) < a$.
4. Soit G un tel graphe. Soit G' un graphe obtenu à partir de G en supprimant le minimum de sommets afin que G' ne contienne aucun triangle. Montrer que :
$$\chi(G') > \frac{n^{\varepsilon}}{6 \ln n}$$
et conclure la preuve du théorème de Mycielski.

Exercice 2. *Second théorème de Borel–Cantelli*

L'objectif de cet exercice est de montrer le second théorème de Borel-Cantelli [2]. Il donne une réciproque du théorème de Borel–Cantelli vu en cours, dans le cas où les évènements sont indépendants.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements *indépendants* de probabilité p_n, telle que la somme $\sum_n p_n$ diverge. On veut montrer qu'alors, presque sûrement, une infinité d'évènements A_n se réalisent.

1. Exprimer l'évènement $E_\infty :=$ « une infinité d'évènements A_n se réalisent » en terme d'unions et d'intersections des évènements A_n.
2. Soit $B_{k,\ell}$ l'évènement $\cap_{k\leq n\leq \ell} \overline{A_n}$. Montrer que pour tout k fixé, $\lim_{\ell\to\infty} \mathbf{P}\left\{B_{k,\ell}\right\} = 0$.
Indice : *on pourra utiliser l'inégalité* $1 + x \leq e^x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
3. On note $B_k := \cap_{n\geq k} \overline{A_n}$. En déduire que $\mathbf{P}\{\cup_k B_k\} = 0$.
4. Conclure que $\mathbf{P}\{E_\infty\} = 1$.
5. *Application.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p_n = \frac{1}{n}$. Montrer que, presque sûrement, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient un nombre infini de « 1 », mais un nombre fini de « 11 ».

Exercice 3. *Conditions de convergence*

Soit X_n une suite infinie de variables de Bernoulli indépendantes de paramètres $\mathbf{P}\{X_n = 1\} = 1 - p_n$, avec $0 \leq p_n \leq 1/2$.

1. Jan Mycielski (1932–2025), mathématicien polono-américain.
2. Émile Borel (1871–1956), mathématicien français ; et Francesco Paolo Cantelli (1875–1966), mathématicien italien

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite X_n converge en distribution.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite X_n converge en probabilité.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite X_n converge presque sûrement.

Exercice 4. *Suite de bits aléatoires*

On se donne X_i une suite infinie de bits aléatoires non biaisés.

1. Montrer que presque sûrement tout mot fini apparaît dans la suite X_i.
2. En déduire que presque sûrement tout mot fini apparaît une infinité de fois dans la suite X_i.

Exercice 5. *Applications*

1. Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires avec $\mathbf{E}[X_n] = 5$ et $\mathbf{Var}[X_n] = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout n.
   $\{X_n\}$ converge-t-elle en probabilité vers 5 ?
2. Soient $\{X_n\}$ des variables aléatoires iid avec $\mathbf{E}[X_n] = 4$ et $\mathbf{Var}[X_n] = 9$ pour tout n.
   Trouver $C(n, x)$ tel que :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\{X_1 + \ldots + X_n \leq C(n,x)\} = \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt\,.$$
3. Donner un exemple de suite $\{Y_n\}$ telle que :
   — $\{Y_n\}$ converge en probabilité vers 0,
   — $\{\frac{Y_n}{n}\}$ converge presque sûrement vers 0,
   — mais $\{Y_n\}$ ne converge pas presque sûrement vers 0.

Exercice 6. *Un c'est bien, deux c'est mieux*

Deux cent étudiant·es participent à un concours de maths. Le concours comporte 6 questions. Pour chaque question, au moins 120 étudiant·es ont réussi à répondre correctement. Montrer qu'il existe deux étudiant·es qui avaient tout bon à elleux deux (*i.e.* tels que pour chaque question, au moins un·e des étudiant·es a bien répondu).

Exercice 7. *Union d'intervalles*

Soit S une union d'intervalles inclus dans le segment $[0; 1]$. On suppose que la longueur totale de S est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe deux points $x, y \in S$ tels que $|x - y| = 0,1$.

Exercice 8. *Lemme local de Lovász*

Lemme Local de Lovász. *Soient n, d des entiers, $0 \leq p \leq 1$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que :*

(1) pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\mathbf{P}\{A_i\} \leq p$,

(2) les événements $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ admettent un graphe de dépendance de degré $\leq d$,

(3) on a $4dp \leq 1$.

Alors on a $\mathbf{P}\left\{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right\} > 0$.

Soit $k > 6$. On se donne une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini F telle que :

1. Pour tout $i \in I$, $|A_i| = k$,
2. Pour tout $x \in F$, $|\{i \in I \mid x \in A_i\}| \leq \frac{2^k}{8k}$.

En utilisant le lemme local de Lovász [3], montrer qu'il existe une partition $F = F_1 \cup F_2$ telle que

$$\forall i \in I, \qquad A_i \cap F_1 \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad A_i \cap F_2 \neq \emptyset\,.$$

3. László Lovász (né en 1948), mathématicien hongrois.