

Devoir Maison 1
à rendre le 13 novembre 2026

Exercice 1 Bits aléatoires I

Voici trois algorithmes naturels pour tirer au sort un élément k de loi uniforme dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ à partir d'une suite de bits aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ (supposés i.i.d. de loi $B(1/2)$).

- A. On tire au sort un élément uniformément dans $\{1, \dots, 8\}$ en utilisant 3 bits, et on recommence si l'élément n'est pas dans $\{1, \dots, 5\}$.
- B. On interprète $(X_n)_{n \geq 1}$ comme le développement en base 2 d'un élément x de l'intervalle $[0, 1]$ et on renvoie $(k+1)$ si $x \in [k/5, (k+1)/5[$.
- C. On considère les 5 premiers bits. S'ils ne sont pas tous identiques, on choisit k parmi les indices des éléments minoritaires (s'il y en a deux, cela nécessite un bit supplémentaire). S'ils ont tous identiques, on répète la procédure sur les 5 bits suivants.¹

Pour chacun des algorithmes, calculer l'espérance du nombre de bits nécessaires pour générer un élément de loi uniforme dans $\{1, \dots, 5\}$. Pouvez-vous faire plus économique ?

Exercice 2 MAX-CUT

Soit $G = (V, E)$ un graphe (non-orienté, sans boucle ni arête multiple). Pour $A \subset V$, on note $\text{Cut}(A)$ la coupe selon A , c'est à dire l'ensemble des arêtes reliant un sommet de A à un sommet de $V \setminus A$. On considère la coupe maximale de G définie comme

$$\text{MAXCUT}(G) = \max_{A \subset V} |\text{Cut}(A)|$$

(on note $|X|$ le cardinal d'un ensemble X).

1. Montrer par la méthode probabiliste l'inégalité $\text{MAXCUT}(G) \geq |E|/2$.

On considère l'algorithme glouton suivant pour approximer $\text{MAXCUT}(G)$ (on suppose que l'ensemble V des sommets de G est muni d'un ordre total). On note $\text{GreedyMAXCUT}(G)$ le cardinal de la coupe produite par cet algorithme. Il est évident que $\text{GreedyMAXCUT}(G) \leq \text{MAXCUT}(G)$.

$A \leftarrow \emptyset, B \leftarrow \emptyset$

Pour i **dans** V

Soit a_i le nombre de voisins de i dans A et b_i le nombre de voisins de i dans B

Si $a_i > b_i$ **alors** $B \leftarrow B \cup \{i\}$

Sinon, $A \leftarrow A \cup \{i\}$

Renvoyer la coupe selon A .

2. A l'aide de cet algorithme, donner une autre preuve de l'inégalité $\text{MAXCUT}(G) \geq |E|/2$.
3. On considère le graphe H_n de sommets $\{1, \dots, 2n\}$ et ayant pour arêtes

$$\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}; \text{ ainsi que } \{i, j\} \text{ pour tous } i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } j \in \{n+1, \dots, 2n\}.$$

Montrer que le rapport $\text{MAXCUT}(H_n)/\text{GreedyMAXCUT}(H_n)$ tend vers 2 quand n tend vers l'infini.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que G_n est un graphe aléatoire de loi $G(n, 1/2)$, c'est-à-dire qu'il a pour ensemble de sommets $\{1, \dots, n\}$ et que chaque arête est présente indépendamment avec probabilité $1/2$.

4. Pour $A \subset \{1, \dots, n\}$, quelle est la loi de $|\text{Cut}(A)|$?
5. Montrer que pour une constante C à déterminer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\text{MAXCUT}(G_n) < \frac{n^2}{8} + Cn^{3/2} \right) = 1$$

Indication. On pourra combiner une inégalité de *CHERNOFF* avec la borne de l'union.

1. Algorithme utilisé dans les cours de récréation sous le nom de «main noire, main blanche»

6. Soit k un entier. Soient X et Y deux variables i.i.d. de loi $B(k, 1/2)$.

(a) Calculer $E(X - Y)^2$ et $E(X - Y)^4$.

(b) En déduire que $E[|X - Y|] \geq c_1 \sqrt{k}$ pour une constante $c_1 > 0$.

Indication. On pourra démontrer et utiliser l'inégalité $P\left(Z \geq \frac{1}{2}E[Z]\right) \geq \frac{1}{4} \frac{(E[Z])^2}{E[Z^2]}$ valable pour une v.a. Z à valeurs positives.

7. Montrer que si A et B sont des v.a. indépendantes de lois respectives $B(a, 1/2)$ et $B(b, 1/2)$, alors

$$E[\max(A, B)] \geq \frac{a+b}{4} + c_2 \sqrt{a+b}$$

pour une constante $c_2 > 0$.

8. En déduire que pour une constante $c_3 > 0$

$$E[\text{GreedyMAXCUT}(G_n)] \geq \frac{(n-1)^2}{8} + c_3(n-1)^{3/2}.$$

Exercice 3 Jonglage

Alice apprend à jongler avec k balles et effectue des cycles de jongle avec ses balles jusqu'à en faire tomber une. On numérote les balles de 1 à k .

- On considère que la probabilité de faire tomber la balle i est $p_i = \frac{1}{i+1}$. Donner la probabilité de réussir un cycle de jongle (un cycle consistant à rattraper chaque balle une et une seule fois).
- Soit C le nombre de cycles réussis d'affilée par Alice, quelle loi suit C ? En déduire son espérance.
- Alice s'entraîne sans relâche; elle commence avec 2 balles, puis, lorsqu'elle parvient à faire un cycle, prend une balle supplémentaire et recommence, si elle échoue son cycle, elle conserve le nombre de balles. Soit X_N le nombre de balles que Alice lance après N cycles.
 - Donner l'espérance de X_N pour $N = 5, 20, 100, 1000$. Il est possible (et fortement recommandé) d'utiliser un code pour calculer une approximation des valeurs à 10^{-3} près. Le code devra être envoyé par mail aux chargés de TD.
 - (Bonus) Montrer que $E[X_N]$ tend vers l'infini quand N tend vers l'infini
- (Bonus) Alice décide de rendre son entraînement plus rigoureux, elle ne passe à une balle supplémentaire que si elle réussit deux cycles d'affilée. Si on considère toujours son nombre de balles après N cycles, montrer que l'espérance de cette variable aléatoire converge et donnez le plus petit entier au dessus de cette espérance.